26 de mayo de 2022. Parcial de Análisis Matemático III. Cursos 5.

Para aprobar, se requiere resolver correcta y justificadamente **5** *ítems.*

1. Determinar para qué valores de α y β la función $\mu(x,y) = 3(x-1)^2 y + \alpha y^3 + \dfrac{x-\beta}{x^2+(y-\beta)^2}$ es armónica. Si es posible, escriba la función $f(z) = \phi + i\mu$ holomorfa y calcule $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{f(z)}{z} dz$.

2. Sea la función $H(z) = \dfrac{1}{2i}|z| + \dfrac{2i}{e^{2z}+2}$. Calcular $A - B$, siendo $A = I(3)$ y $B = I(6)$ con $I(\gamma) = \displaystyle\oint_{|z+1|=\gamma} H(z) dz$.

3. ¿Es posible que si la serie que converge a la función $m(z) = \dfrac{2}{(2z-i)(3z-1)^3}$, es $S(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \frac{1}{3})^n$, las tres series siguientes $S_1 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n$, $S_2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n$ y $S_3 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ converjan simultáneamente? ¿A qué valor converge la serie $S_p = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n}$?

4. a) Hallar y graficar la región de convergencia de la serie $S(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} + \frac{n^2}{(z+i)^n}$

   b) Dada la función $f(z) = xy^2 + \dfrac{i}{3}y^3$, hallar el conjunto en $\mathbb{C}$ para que exista $f'(z)$ y aquel para el cual $f(z) \in$ *Hol*.

5. Hallar la región en el plano complejo en la que se transforma la región $\{Im(z) < -2\}$ a través de la función $\dfrac{z}{z+i}$

6. Se tiene la función definida con su serie de potencias: $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n} z^n$. Calcular $I = \displaystyle\int_{|z|=\rho} f(z)\left(z + 2 + \frac{1}{z}\right) dz$. Explicitar claramente condiciones necesarias sobre ρ para que la integral esté bien definida.

7. Hallar la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de la función $h(z) = \dfrac{z+2}{z(z+1)} + \dfrac{\pi}{z^2}e^{-2z}$ en un entorno de $z = 0$. Determinar qué tipo de singularidad tiene en $z = 0$, el residuo en ese punto y su región de convergencia.